# 2016 R

## Le Premier Exercice

### La Question : 1)

$$p(R_U) = \frac{card(R_u)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2}$$

$$p(B_U) = \frac{card(B_u)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2}$$

### La Question : 2) a)

$$p(B_V/R_U) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

### La Question : 2) b)

$$p(B_V/B_U) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$$

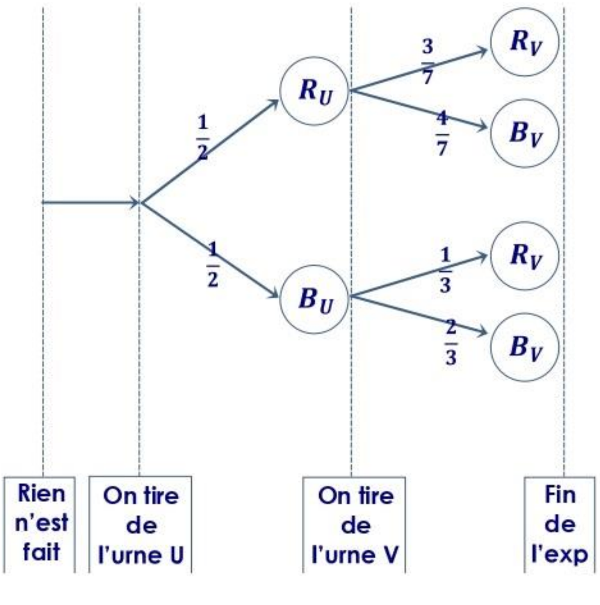
### La Question : 3)

$$\begin{aligned} p(B_V) &= p(R_U \cap B_V) + p(B_U \cap B_V) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{13}{21} \end{aligned}$$

### La Question : 4)

$$\begin{aligned} p(R_V) = 1 - p(B_V) = \frac{8}{21} \\ = p(R_U)\times p(B_V/R_U) + p(B_U)\times p(B_V/B_U) \end{aligned}$$

### Résumé :



# Le Deuxième Exercice

## La Question : 1)

$(E,*)$ est un groupe commutatif car :

- $*$ est une loi de composition interne dans $E$
- $*$ est associative dans $E$
- $M(0)$ est l'élément neutre dans $E$
- Le symétrique de $M(z)$ est $M(-z)$ dans $E$
- $*$ est commutative dans $E$

Je vous laisse le soin de vérifier ces assertions.

## La Question : 2) a)

Il est très facile de montrer, à l'aide d'un simple calcul matriciel, que :
$\forall\ (z,z') \in \mathbb{C}^{2*}\ ;\ \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$

## La Question : 2) b)

Montrer tout d'abord que $\varphi$ est bijective :
( l'équation $\varphi(z) = M(a)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$ ). Et à partir de l'isomorphisme $\varphi$,
on écrit : $(\mathbb{C}^*,\times) = (\varphi(\mathbb{C}^*),\times) = (E^*,\times)$ .
le groupe $(E^*,\times)$ hérite ses caractéristiques du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$ via l'isomorphisme $\varphi$.

## La Question : 3)

$(E,*,\times)$ Est un corps commutatif car :

- $(E,*)$ Est un groupe d'élément neutre $M(0)$.
- $(E\backslash\{M(0)\},\times)$ Est un groupe.
- $\times$ Est distributive par rapport à $*$
- $\times$ Est commutative dans $E$.

# Le Troisième Exercice

## La Question : 1) a)

A l'aide d'un simple calcul, que j'ai fait dans mon brouillon, On montre facilement que :
$\Delta = \left((\sqrt{3}-1)(1-i)\right)^2$ ☺

## La Question : 1) b)

$$\begin{cases} z_1 = \left[4\,;\dfrac{\pi}{3}\right] \\ z_2 = \left[4\,;\dfrac{\pi}{6}\right] \end{cases}$$

## La Question : 2) a)

$$(D) : z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow\ (D) :\ (x+iy) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy)$$

$$\Leftrightarrow\ (D) :\ \sqrt{3}y - x = 0$$

## La Question : 2) b)

Tout d'abord, vous devez montrer que $b^2 = 2a$ et $\frac{2b}{a} = \bar{b}$ à l'aide d'un simple calcul sur des nombres complexes : $a = 1+i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}+i$.
En suite :

$$\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \frac{2a}{(a\bar{z}-2b)(z-b)}$$

$$= \left(\frac{a}{a\bar{z}-2b}\right)\left(\frac{2}{z-b}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\bar{z}-\bar{b}}\right)\left(\frac{2}{z-b}\right)$$

$$= \frac{2}{\overline{(z-b)}\cdot(z-b)}$$

$$= \frac{2}{|z-b|^2}$$

## La Question : 2) c)

$$\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \frac{2}{|z-b|^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{b}{z'-b}\right)\left(\frac{b}{z-b}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{0-b}{z'-b}\right)\times\left(\frac{0-b}{z-b}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ \arg\left(\left(\frac{0-b}{z'-b}\right)\times\left(\frac{0-b}{z-b}\right)\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Rightarrow\ \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_{M'} - z_B}\right) + \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_M - z_B}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Rightarrow\ \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_{M'} - z_B}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_O - z_B}\right)\ [\pi]$$

$$\Rightarrow\ \left(\widehat{\overrightarrow{BM'}\,;\,\overrightarrow{BO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BO}\,;\,\overrightarrow{BM}}\right)\ [\pi]$$

$$\Rightarrow\ (BO)\ est\ la\ bissectrice\ de\ l'angle\ \left(\widehat{\overrightarrow{BM}\,;\,\overrightarrow{BM'}}\right)$$

$$\Rightarrow\ (D)\ est\ la\ bissectrice\ de\ l'angle\ \left(\widehat{\overrightarrow{BM}\,;\,\overrightarrow{BM'}}\right)$$
$$car\ \ O \in (D)\ \ et\ \ B \in (D)$$

# Le Quatrième Exercice

## La Question : 1) a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} (\mathcal{C}_n) \textit{ admet une} \\ \textit{branche parabolique} \\ \textit{suivant l'axe des abscisses} \end{array}$$

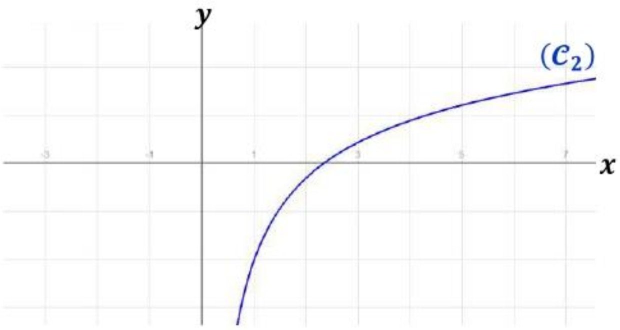
$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = +\infty \Rightarrow \begin{array}{c} \textit{l'axe des ordonnées} \\ \textit{est une asymptote} \\ \textit{verticale pour } (\mathcal{C}_n) \end{array}$$

## La Question : 1) b)

$$\forall\, x > 0 \;;\; f_n'(x) = \frac{1}{x} + \frac{n}{x^2} = \frac{x+n}{x^2} > 0$$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f_n'(x)$ | $+$ |
| $f_n$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

## La Question : 1) c)




## La Question : 2)

$f_n$ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Donc c'est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f_n(\,]0,+\infty[\,)$
$f_n(\,]0,+\infty[\,) = ]-\infty,+\infty[ = \mathbb{R}$ .

## La Question : 3) a)

$$f_n : ]0,+\infty[ \;\mapsto \mathbb{R} \textit{ est une bijection}$$
$$\Rightarrow (\forall y \epsilon \mathbb{R})(\exists!\, x \,\epsilon\, \mathbb{R}) \;;\; f_n(x) = y$$
$$\Rightarrow (\textit{pour } y = 0 \,\epsilon\, \mathbb{R})(\exists!\, \alpha_n \,\epsilon\, ]0,+\infty[\,) \;;\; f_n(\alpha_n) = 0$$
$$\Rightarrow (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)(\exists!\, \alpha_n \,\epsilon\, ]0,+\infty[\,) \;;\; f_n(\alpha_n) = 0$$

## La Question : 3) b)

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{-1}{x} < 0 \;;\; \forall\, x \,\epsilon\, ]0,+\infty[$$
$$\Rightarrow \;\forall\, x > 0 \;;\; f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

## La Question : 3) c)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) &= 0 - f_{n+1}(\alpha_n) \\ &= -\ln(\alpha_n) + \frac{n+1}{\alpha_n} \\ &= -\ln(\alpha_n) + \frac{n}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= -\left(\ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n}\right) + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= -f_n(\alpha_n) + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= -0 + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= \frac{1}{\alpha_n} > 0 \;;\; \textit{car } \alpha_n > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) > 0 \;;\; \forall n \geq 1$$
$$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n) \;;\; \forall n \geq 1$$
$$\Rightarrow f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_{n+1})\big) > f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_n)\big) \;;\; \forall n \geq 1$$
$$\textit{car } f_{n+1}^{-1} \textit{ est croissante}$$
$$\Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n \;;\; \forall n \geq 1$$
$$\Rightarrow (\alpha_n)_{n\geq1} \textit{ est une suite strictement croissante}$$

## La Question : 4) a)

On pose $\varphi(x) = \ln x - x$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\varphi$ | $-\infty \nearrow$ | $-1$ | $\searrow -\infty$ |

$$\Rightarrow \;(\forall x > 0) \;;\; \varphi(x) < 0$$
$$\Rightarrow \;(\forall x > 0) \;;\; \ln x < x$$

## La Question : 4) b)

$$\begin{aligned} \alpha_n > 0 \;&\Rightarrow \ln(\alpha_n) < \alpha_n \;;\; \textit{selon } 4)a) \\ &\Rightarrow \ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n} < \alpha_n - \frac{n}{\alpha_n} \\ &\Rightarrow f_n(\alpha_n) < \frac{\alpha_n^2 - n}{\alpha_n} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{\alpha_n^2 - n}{\alpha_n} \\ &\Rightarrow \alpha_n^2 - n > 0 \;;\; \textit{car } \alpha_n > 0 \\ &\Rightarrow |\alpha_n| > \sqrt{n} \;;\; \textit{avec } |\alpha_n| = \alpha_n > 0 \\ &\Rightarrow \alpha_n > \underbrace{\sqrt{n}}_{n\infty \to +\infty} \Rightarrow \lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty \end{aligned}$$

## La Question : 5) a)

Utiliser le théorème de la médiane :

$$On\ a\ :\ \left|\begin{array}{l} f_n\ est\ continue\ sur\ [\alpha_n\ ,\alpha_{n+1}] \subset\ ]0,+\infty[ \\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ \alpha_n < \alpha_{n+1} \end{array}\right.$$

$$Alors\ :\ \left|\begin{array}{l} \exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n\ ,\alpha_{n+1}] \\ \displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)dx = (\alpha_{n+1} - \alpha_n) f_n(c_n) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\ \exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n\ ,\alpha_{n+1}]\ ;\ \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\,dx = f_n(c_n)$$

$$\Rightarrow\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)(\exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n\ ,\alpha_{n+1}])\ ;\ I_n = f_n(c_n)$$

## La Question : 5) b)

$$c_n\ \epsilon\ [\alpha_n\ ,\alpha_{n+1}]\ \Rightarrow\ \alpha_n \leq c_n \leq \alpha_{n+1}$$

$$\Rightarrow\ f_n(\alpha_n) \leq f_n(c_n) \leq f_n(\alpha_{n+1})\ ;\ f_n \nearrow$$

$$\Rightarrow\ 0 \leq I_n \leq \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ 0 \leq I_n \leq \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ 0 \leq I_n \leq \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n+1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ 0 \leq I_n \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1}) + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ 0 \leq I_n \leq 0 + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}}\ ;\ \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

## La Question : 5) c)

$$\lim_{n\infty}(\alpha_n) = \lim_{n\infty}(\alpha_{n+1}) = +\infty\ \Rightarrow\ \underbrace{0}_{\xrightarrow{n\infty} 0} \leq I_n \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\infty}(I_n) = 0$$

# Le Cinquième Exercice

## La Question : 1) a)

$x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ est continue sur $[n,+\infty[\ \subseteq [2,+\infty[$

$\Rightarrow\ x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ admet des primitives sur $[n,+\infty[$.
En particulier $g_n(x)$

$$\Rightarrow\ g_n'(x) = \frac{1}{\ln x}\ ;\ \forall x \geq n$$

## La Question : 1) b)

$$g_n'(x) = \frac{1}{\ln x} > 0\ ;\ \forall x \geq n$$

$\Rightarrow\ g_n$ est croissante tout au long de $[n,+\infty[$

## La Question : 2) a)

On pose $u = t - 1\ \Leftrightarrow\ \left|\begin{array}{l} du = dt \\ t = u - 1 \\ t = n\ \Leftrightarrow\ u = n - 1 \\ t = x\ \Leftrightarrow\ u = x - 1 \end{array}\right.$

$$\forall\ u \geq 0\ ;\ \ln(1+u) \leq u$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\ln(1+u)} \geq \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow\ \int_{n-1}^{x-1}\left(\frac{1}{\ln(1+u)}\right)du \geq \int_{n-1}^{x-1}\left(\frac{1}{u}\right)du$$

$$\Rightarrow\ g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$$

## La Question : 2) b)

$$g_n(x) \geq \underbrace{\ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)}_{\xrightarrow{x \to +\infty} +\infty}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$$

## La Question : 3) a)

$g_n$ est continue et strictement croissante sur $[n,+\infty[$
$\Rightarrow\ g_n$ est une bijection de $[n,+\infty[$
dans $g_n([n,+\infty[) = [0,+\infty[$

## La Question : 3) b)

$$g_n\ :\ [n,+\infty[\ \mapsto\ [0,+\infty[\ est\ une\ bijection$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall\ y\ \epsilon\ [0,+\infty[)(\exists!\ x\ \epsilon\ [n,+\infty[)\ ;\ g_n(x) = y$$

$$\Rightarrow\ (pour\ y = 1)(\exists!\ u_n\ \epsilon\ [n,+\infty[)\ ;\ g_n(u_n) = 1$$

$$\Rightarrow\ (\forall n \geq 2)(\exists!\ u_n \geq n)\ ;\ \int_n^{u_n}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt = 1$$

## La Question : 4) a)

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt = \int_{u_n}^{n}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt + \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt + \int_{n+1}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt$$

$$= -1 + \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt + 1$$

$$= \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt$$

## La Question : 4) b)

$$signe\left(\int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt\right) \equiv signe\left(\int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt\right)$$

$$signe(u_{n+1}-u_n) \equiv signe(n+1-n)\ ;\ car\ \left(\frac{1}{\ln t}\right) > 0$$

$$\Rightarrow\ signe(u_{n+1}-u_n) \equiv signe(1) \equiv \boxed{+}$$

$$\Rightarrow\ u_{n+1}-u_n > 0\ ;\ \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow\ u_{n+1} > u_n\ ;\ \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow\ (u_n)_{n\geq 2}\ \ est\ une\ suite\ strictement\ croissante.$$

## La Question : 4) c)

$$u_n \geq \underbrace{n}_{\substack{n\infty \\ +\infty}} \ \Rightarrow\ \lim_{n\infty}(u_n) = +\infty$$